Solution proposée par Michel Journeau (CI-150)

Soit $\alpha\ \beta\ \gamma$ les valeurs des angles $A\ B\ C$ du triangle
les angles au centre correspondants sont $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$

Longueurs les côtés

Dans les 3 triangles isocèles de sommet O :

$BC = 2R\sin\alpha \qquad CA = 2R\sin\beta \qquad AB = 2R\sin\gamma \qquad (1)$

Coordonnées des sommets (origine en O)

On calcule l'angle $yOA = \beta-\gamma$

$\vec{OA} = R\left(-\sin(\beta-\gamma);\ \cos(\beta-\gamma)\right)$
$\vec{OB} = R\left[-\sin\alpha;\ -\cos\alpha\right] \qquad (2)$
$\vec{OC} = R\left[\sin\alpha;\ -\cos\alpha\right]$

Calcul de $\vec{PQ}$

Par construction, $BP = CQ = BC = 2R\sin\alpha$

$\vec{BP} = BP[\cos\beta;\ \sin\beta] = 2R\sin\alpha\,[\cos\beta;\ \sin\beta]$
$\vec{BC} = BC[1;0] = 2R\sin\alpha\,[1;0]$
$\vec{CQ} = CQ[-\cos\gamma;\ \sin\gamma] = 2R\sin\alpha\,[-\cos\gamma;\ \sin\gamma]$

$\vec{PQ} = \vec{PB} + \vec{BC} + \vec{CQ}$
$= 2R\sin\alpha\left[(-\cos\beta+1-\cos\gamma);\ (-\sin\beta+0+\sin\gamma)\right]$

Calcul de $\vec{OI}$

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OA}.BC + \vec{OB}.CA + \vec{OC}.AB}{AB+BC+CA}$$

D'après les relations (1), on peut écrire :

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OA}\sin\alpha + \vec{OB}\sin\beta + \vec{OC}\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$$

En explicitant les valeurs de $\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC}$ selon (2) :

$$\vec{OI} = \frac{R}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\left\{\begin{array}{l}(-\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha - \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\gamma);\\ (\cos(\beta-\gamma)\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma)\end{array}\right\}$$

$\vec{PQ} \perp \vec{OI}$?

Si tel est le cas, le produit scalaire $\vec{PQ}.\vec{OI}$ doit être nul
Calculons ce produit scalaire, en laissant tomber
les facteurs constants.

$$\vec{PQ}\cdot\vec{OI} = (1-\cos\beta-\cos\gamma)(-\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha - \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\gamma)$$
$$+ (\sin\gamma - \sin\beta)\,(\cos(\beta-\gamma)\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma)$$

Le développement de cette formule donne 15 termes que j'ai numérotés de (1) à (15)

(1) $-\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha$
(2) $+\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha\cos\beta$
(3) $+\sin(\beta-\gamma)\sin\alpha\cos\gamma$
(4) $-\sin\alpha\sin\beta$
(5) $+\sin\alpha\sin\beta\cos\beta$
(6) $+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$
(7) $+\sin\alpha\sin\gamma$
(8) $-\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta$
(9) $-\sin\alpha\sin\gamma\cos\gamma$
(10) $+\cos(\beta-\gamma)\sin\alpha\sin\gamma$
(11) $-\cos(\beta-\gamma)\sin\alpha\sin\beta$
(12) $-\cos\cancel{\alpha\sin\beta}\sin\gamma$
(13) $+\cos\alpha\sin^2\beta$
(14) $-\cos\alpha\sin^2\gamma$
(15) $+\cos\cancel{\alpha\sin\gamma}\sin\beta$

Seuls les termes (12) et (15) s'annulent
Pour les 13 autres, il faut chercher des regroupements simplificateurs.
Il faut évidemment tenir compte du fait de $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

I (6)+(8) : $\sin\alpha[\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta] = \sin\alpha\sin(\beta-\gamma)$
$\Rightarrow (1)+(6)+(8) = 0$

II (5)+(13) : $\sin\beta[\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha] = \sin\beta\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\sin\gamma$
(9)+(14) : $-\sin\gamma[\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha] = -\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma) = -\sin\gamma\sin\beta$
$\Rightarrow (5)+(13)+(9)+(14) = 0$

Il nous reste 6 termes, (2) (3) (4) (7) (10) (11)
Tous comportent le facteur $\sin\alpha$ que l'on peut laisser tomber

III (2)+(11) : $\sin(\beta-\gamma)\cos\beta - \cos(\beta-\gamma)\sin\beta = \sin(\beta-\gamma-\beta) = -\sin\gamma$
$\Rightarrow (7)+(2)+(11) = 0$

IV (3)+(10) : $\sin(\beta-\gamma)\cos\gamma + \cos(\beta-\gamma)\sin\gamma = \sin(\beta-\gamma+\gamma) = \sin\beta$
$\Rightarrow (4)+(3)+(10) = 0$

et voilà !